A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT III r., sem. letni

KOLOKWIUM 2, ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Wrocław, 8 czerwca 2011

ZADANIE 1a *** Rozważmy operator z przestrzeni Hilberta ℓ^2 w siebie zadany wzorem $T(x) = y$, gdzie $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ i $y_n = x_n + x_{n+1}$. Oblicz jego normę.

ROZWIĄZANIE: Niech x ma normę 1. Niech $x' = (x'_n)$ oznacza ciąg przesunięty $x'_n = x_{n+1}$. Oczywiście $\|x'\| \leq 1$ ("urwaliśmy" pierwszy wyraz ciągu). Nasz operator to $T(x) = x + x'$. Zatem

$$\|T(x)\| = \|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\| \leq 2.$$

Stąd $\|T\| \leq 2$. Teraz weźmy $x = (x_n)$, gdzie $x_n = \frac{1}{\sqrt{k}}$ dla $n \leq k$, potem zera. Jest to element o normie 1. Element x' ma wyrazy $\frac{1}{\sqrt{k}}$ dla $n \leq k-1$, potem zera. Czyli ciąg $x - x'$ to ciąg, który ma tylko na miejscu n-tym $\frac{1}{\sqrt{k}}$, poza tym zera. Jego norma to $\|x-x'\| = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Zatem $\|T(x)\| = \|x+x'\| = \|2x-(x-x')\| \geq \|2x\|-\|x-x'\| \geq 2-\frac{1}{\sqrt{k}}$, a to jest dowolnie bliskie 2. Stąd $\|T\| \geq 2$. Ostatecznie $\|T\| = 2$.

ZADANIE 1b **** Na $L^2(\mathbb{R})$ rozważmy operator $T(f)(x) = f(x) + f(2x)$. Oblicz jego normę.

Wskazówka: Szacowanie z góry jest łatwe. Do oszacowania z dołu rozważaj funkcję $\frac{1}{x^\alpha+1}$ dla $x \geq 0$ i zero dla $x < 0$, gdzie α jest ciut większa od $\frac{1}{2}$ i zauważ, że $Tf \geq cf$ dla pewnej stałej c zależnej od α (wskaż jakiej?) Najgorszy pomysł to całkować te funkcje w celu obliczenia normy!

ROZWIĄZANIE: Oczywiście funkcja $g(x) = f(2x)$ ma normę $\frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|$ (w całce obliczającej normę robimy podstawienie $t = 2x$), zatem $\|T(f)\| = \|f + g\| \leq (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\|f\|$. Stąd $\|T\| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Niech $f = \frac{1}{x^\alpha+1}$ dla $x \geq 0$ i zero dla x ujemnych. Jest to funkcja całkowalna z kwadratem, o ile tylko $\alpha > \frac{1}{2}$. Wtedy

$$g(x) = \frac{1}{2^\alpha x^\alpha + 1} \geq \frac{1}{2^\alpha(x^\alpha + 1)} = \frac{1}{2^\alpha} f(x).$$

Stąd $T(f) = f + g \geq (1 + \frac{1}{2^\alpha})f$, a zatem $\|T\| \geq 1 + \frac{1}{2^\alpha}$. Ponieważ α jest dowolnie bliskie $\frac{1}{2}$, dostajemy $\|T\| \geq 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ostatecznie $\|T\| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ZADANIE 2a *** Rozważmy operator $T : \ell^1 \to c$ (z ciągów bezwzględnie sumowalnych w ciągi zbieżne) zadany wzorem $T(x) = x'$, gdzie $x = (x_n)$ a $x' = (x'_n)$, $x'_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Jakim wzorem zadaje się operator sprzężony $T^* : \ell^1 \to \ell^\infty$?

ROZWIĄZANIE: Biorąc $x = (x_n) \in \ell^1$ i $y^* = (y_n) \in \ell^\infty$ i pamiętając jak taki y^* działa jako funkcjonał na ℓ^1 dostajemy:

$$\langle x | T^* y^* \rangle = \langle Tx | y^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i \le n} x_i \Big) y_n = ...$$

Teraz zamieniamy kolejność sumowania

$$... = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Big(\sum_{n \ge i} y_n \Big)$$

i już widać, że funkcjonałem nałożonym na x jest element o wyrazach $y'_n = \sum_{n \ge i} y_n$. Zatem T^* wyraża się wzorem $T^*(y) = y'$, gdzie $y' = (y'_n)$, $y'_n = \sum_{n \ge i} y_n$.

ZADANIE 2b *** Rozważmy operator $T : \ell^1 \to c_0$ (z ciągów bezwzględnie sumowalnych w ciągi zbieżne do zera) zadany wzorem $T(x) = x'$, gdzie $x = (x_n)$ a $x' = (x'_n)$, $x'_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$. Jakim wzorem zadaje się operator sprzężony $T^* : \ell^1 \to \ell^\infty$?

ROZWIĄZANIE: Biorąc $x = (x_n) \in \ell^1$ i $y^* = (y_n) \in \ell^\infty$ i pamiętając jak taki y^* działa jako funkcjonał na ℓ^1 dostajemy:

$$\langle x | T^* y^* \rangle = \langle Tx | y^* \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i \ge n} x_i \Big) y_n = ...$$

Teraz zamieniamy kolejność sumowania

$$... = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Big(\sum_{n \le i} y_n \Big)$$

i już widać, że funkcjonałem nałożonym na x jest element o wyrazach $y'_n = \sum_{n \le i} y_n$. Zatem T^* wyraża się wzorem $T^*(y) = y'$, gdzie $y' = (y'_n)$, $y'_n = \sum_{n \le i} y_n$.

ZADANIE 3a **** Udowdnij, że zbieżność $*$-słaba w ℓ^∞ jako sprzężonej do ℓ^1 to zbieżność po współrzędnych w koniunkcji z ograniczonością norm w $\|\cdot\|_\infty$. Udowodnij tylko implikacje:
1) Ze zbieżności punktowej i ogrniczoności ciągu wynika jego zbieżność $*$-słaba;
2) Ze zbieżności $*$-słabej ciągu wynika jego zbieżność punktowa (ograniczoność odpuszczamy).

ROZWIĄZANIE: Element $y = (y_n) \in \ell^\infty$ działa jako funkcjonał na $x = (x_n) \in \ell^1$ wzorem

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Załóżmy najpierw, że "ciąg ciągów" $y^{(k)}$ zbiega po współrzędnych do jakiegoś y i że normy $\|y^{(k)}\|_\infty$ są ograniczone przez jakieś M. Ustalmy $x \in \ell^1$ i $\epsilon > 0$, i niech n_0 będzie tak duże, że $\sum_{n \le n_0} |x_n| < \epsilon/4M$. Wtedy

$$|f_{y^{(k)}}(x) - f_y(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n||y_n^{(k)} - y_n| = \sum_{n \le n_0} |x_n||y_n^{(k)} - y_n| + \sum_{n > n_0} |x_n||y_n^{(k)} - y_n|.$$

Na mocy zbieżności punktowej $y_n^{(k)}$ do y_n, pierwsza suma robi się, dla dostatecznie dużego k, mniejsza od $\epsilon/2$. Druga suma, nawet niezależnie od k, jest mniejsza od $\epsilon/4M$ razy $2M$ ($2M$ ogranicza $|y_n^{(k)} - y_n|$ dla wszystkich n). Wszystko razem jest więc (od pewnego k) mniejsze od ϵ, czyli jest zbieżność $*$-słaba.

Na odwrót, załóżmy zbieżność $*$-słabą, to znaczy, że różnice jak ta powyżej po lewej zbiegają po k do zera dla wszystkich $x \in \ell^1$. Biorąc za x element bazowy $e^{(n)}$ (same zera, a na n-tym miejscu 1-ka) dostajemy natychmiast, że $y_n^{(k)} \underset{k}{\to} y_n$. Czyli jest zbieżność punktowa.

- -

Do kompletu podam jak wynika ograniczoność. Jest to fakt ogólny: **gdy X jest przestrzenią Banacha, to ciąg funkcjonałów zbieżny $*$-słabo jest ograniczony w normie**. Weźmy ciąg funkcjonałów f_n nieograniczony w normie. Wybierając podciąg można założyć, że $\|f_n\| = a_n^2$ rośnie tak szybko, że $\frac{1}{a_n}$ jest co najmniej dwukrotnie większy od sumy $\sum_{i>n} \frac{1}{a_i}$ ($a_n = 3^n$ ma tę własność). Niech x_n będzie elementem o normie 1 takim, że $|f_n(x_n)| \approx a_n^2$, gdzie niedokładność jest pomijalnie mała. Tworzymy szereg $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} x_n$, gdzie α_n są odpowiednio dobranymi liczbami o module 1. Ponieważ a_n rośnie co najmniej wykładniczo, to szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, a więc zbieżny (tu jest potrzebna zupełność). Liczby α_n dobieramy indukcyjnie: α_1 jest dowolna (np. 1). Załóżmy, że dobraliśmy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Wtedy patrzmy na argument liczby

$$f_n\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{\alpha_i}{a_i} x_i\Big)$$

i dobieramy α_n tak aby liczba $f_n(\alpha_n x_n)$ miała taki sam argument. Wtedy mamy

$$\Big|f_n\Big(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{\alpha_i}{a_i} x_i\Big)\Big| = \Big|f_n\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \tfrac{\alpha_i}{a_i} x_i\Big)\Big| + |f_n(\tfrac{\alpha_n}{a_n} x_n)| \ge |f_n(\tfrac{\alpha_n}{a_n} x_n)| = \tfrac{1}{a_n}|f_n(x_n)| \approx a_n.$$

Teraz najważniejsze. Jeśli do argumentu $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a_i} x_i$ dodamy wszystkie dalsze wyrazy tak zbudowanego szeregu (czyli dojdziemy do granicy szeregu x), to norma tego co dodamy nie przekroczy połowy $\frac{1}{a_n}$, a więc po nałożeniu naszego funkcjonału f_n (o normie a_n^2) jego wartość zmieni się (co do modułu) o co najwyżej $\frac{a_n}{2}$, a to oznacza, że $|f_n(x)|$ zostanie co najmniej $\frac{a_n}{2}$. Czyli na elemencie granicznym x nasz ciąg funkcjonałów ucieka z modułami do nieskończoności i nie może być zbieżny.

ZADANIE 3b *** Podaj przykłady uzasadniające, że zbieżność słaba w przestrzeni $C([0,1])$ jest istotnie silniejsza od zbieżności punktowej i istotnie słabsza od zbieżności jednostajnej. (Nie pokazuj, że jest odpowiednio silniejsza i słabsza – chodzi tylko o brak równoważności.)

Wskazówka: W drugim przykładzie może się przydać Tw. Lebesgue'a.

ROZWIĄZANIE: Najpierw weźmy ciąg funkcji f_n postaci zero od $\frac{1}{n}$ do 1, a na $[0, \frac{1}{n}]$ "namiot" o wysokości $2n$ (taka funkcja ma całkę 1). Funkcje te zbiegają punktowo do zera, ale nie zbiegają do zera słabo, gdyż po nałożeniu funkcjonału, jakim jest całka miarą Lebesgue'a, nie ma zbieżności do zera.

A teraz weźmy podobne "namioty" ale wszystkie o wysokości 1. Takie funkcje zbiegają słabo do zera (co zaraz uzasadnimy), ale oczywiście nie zbiegają jednostajnie. Uzasadniamy: Po pierwsze wystaczy nakładać funkcjonały nieujemne. Taki funkcjonał to całka miarą nieujemną skończoną μ (Tw. Riesza). Powyższe funkcje zbiegają do zera punktowo, ponadto są nieujemne i ograniczone przez 1, która jest całkowalna $d\mu$ (bo μ jest skończona). Teraz możemy stosować Tw. Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej i całki z f_n zbiegają do całki z granicznej funkcji zero.

ZADANIE 4a ** W nieskończenie-wymiarowej ośrodkowej przestrzeni Hilberta H dany jest zbiór skończony A. Udowodnij, że istnieje funkcjonał niezerowy, który zeruje się na zbiorze A.

ROZWIĄZANIE: To jest zadanie łatwe. Przestrzeń $V = \mathrm{Lin}(A)$ (rozpięta przez zbiór A) jest skończenie-wymiarowa, a więc jest podprzestrzenią domkniętą właściwą w H i $V^\perp$ jest nietrywialna. Dowolny wektor niezerowy z $V^\perp$ zadaje funkcjonał (poprzez iloczyn skalarny) niezerowy, ale zerujący się na V, a więc i na A.

ZADANIE 4b ** W przestrzeni unormowanej V wybieramy skończony i liniowo niezależny układ wektorów $\{x_1, x_2 \dots, x_n\}$. Wykaż, że istnieje funkcjonał ograniczony, który we wszystkich tych punktach jest ściśle dodatni.

ROZWIĄZANIE: To zadanie jest łatwe. Każdy element podprzestrzeni $V_0 = \mathrm{Lin}(\{x_1, x_2 \dots, x_n\})$ wyraża się jako kombinajca liniowa $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n$ i z niezależności jest to przedstawienie jednoznaczne. Na V_0 określamy funkcjonał wzorem:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Na przestrzeni skończenie-wymiarowej każdy funkcjonał jest ciągły, a więc ograniczony. Zatem, z tw. Hahna–Banacha, funkcjonał ten można przedłużyć do funkcjonału ograniczonego na całej przestrzeni V. Bezpośrednio ze wzoru, $f(x_i) = 1 > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

ZADANIE 5a ** Udowodnij jednoznaczność w twierdzeniu Hahna–Banacha zastosowanego do ośrodkowej przestrzeni Hilberta H: Jeśli H_0 jest niezerową domkniętą podprzestrzenią H i F_0 jest funkcjonałem ograniczonym na H_0, to funkcjonał F o tej samej normie co F_0 i zgadzający się z F_0 na H_0 jest JEDYNY?

ROZWIĄZANIE: To jest zadanie łatwe. H_0 jest też przestrzenią Hilberta, więc funkcjonał F_0 to iloczyn skalarny z jakimś elementem $v_0 \in H_0$ o normie tej samej co norma F_0. Przedłużenie F to iloczyn skalarny z elementem $v \in H$ o normie tej samej co norma F, czyli tej samej co norma v_0. Teraz $\langle v_0|v\rangle = F(v_0) = F_0(v_0) = \langle v_0|v_0\rangle = \|v_0\|^2 = \|v_0\|\|v\|$, czyli mamy równość w nierówności Schwarza. To oznacza, że v i v_0 są zależne liniowo zależne, a ponieważ ich iloczyn skalarny jest dodatni, to współczynnik jest dodatni, a ponieważ mają te same normy, to współczynnik ten wynosi 1. Pokazaliśmy, że $v = v_0$, a to jednoznacznie determinuje F.

ZADANIE 5b ** Dane są dwie liczby p, q większe od 1, związane zależnością $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Na odcinku $[0,1]$ dana jest funkcja zespolona f taka, że $\int |f|^p \, dx = 1$. Uzasadnij, że istnieje funkcja zespolona g taka, że $\int |g|^q \, dx = 1$ oraz $\int fg = 1$.

ROZWIĄZANIE: To jest niemal oczywiste. Funkcja f jest elementem $L^p([0,1])$, zatem istnieje funkcjonał unormowany wyciągający normę. Funkcjonał ten to funkcja $g \in L^q([0,1])$. Unormowanie oznacza, że $\int |g|^q \, dx = 1$, a wyciąganie normy f (która wynosi 1), to właśnie warunek z całką iloczynu.

Inny sposób, to za g wziąć f do odpowiedniej potęgi i przemnożonej przez odpowiednio dobraną fukcję o module stale równym 1, tak aby $fg = |f|^p$.

Tomasz Downarowicz